....

Lösungsvorschlag

3A-Z

Lineare Algebra I: Klausur I

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2021

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Das Tragen einer medizinischen Maske oder einer FFP2-Maske ist während der gesamten Klausur vorgeschrieben.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ & & -x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & 2 \end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \mathbf{b})$ für das System auf. Formen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenoperationen so in eine Matrix $(A' \mid \mathbf{b}')$ um, dass A' Zeilenstufenform hat.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Geben Sie ferner in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $\mathcal{L}(A \mid \mathbf{b})$ des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ist durch

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & t \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

gegeben. Nun wenden wir elementare Zeilenoperationen an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & t \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{dann } III + I]{\text{erst } IV - III} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-t \end{array}\right) \xrightarrow{III + II}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-t \end{array}\right)}_{= (A', b') \text{ mit } A' \text{ in Zeilenstufenform}}$$

(b)

Anhand der vierten Zeile sehen wir, dass $\mathcal{L}(A'|b')$ genau dann nicht leer ist, wenn $t = 2$ ist.

(c)

Nach Teil (b) setzen wir $t = 2$. Wir streichen zudem die Nullzeile und bringen die so entstandene Matrix auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}\cdot\frac{1}{2}]{\mathrm{II}\cdot(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Nun wenden wir den Algorithmus aus der Vorlesung an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Nicht-Pivot-spalten}]{\text{Vorzeichen-wechsel}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Zeilen einfügen}]{\text{Passende Standardbasis-}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Es gelten jetzt:

- $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis von $\mathcal{L}(A)$

- $$\mathcal{L}(A|b) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, & t = 2 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1
(Seite 4)

Aufgabe 2
Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y - 2z = 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' Basen sind von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \qquad C := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C' := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_{C'} M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, genügt es zu zeigen, dass B und B' linear unabhängig sind. Nun ist

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\Delta\text{'s-Matrix}}{\overset{\text{obere}}{=}} 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

und

$$\det(B') = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{3\times 3}{\overset{\text{Leibniz}}{=}} -1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -2 \neq 0,$$

sodass B und B' linear unabhängig sind.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$, ist V nicht ganz $\mathbb{R}^3$ und somit $\dim(V) \leq 2$. Daher genügt es erneut zu zeigen, dass C und C' linear unabhängig sind.

Sind nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

- $\underbrace{\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}-\lambda+2\mu\\\lambda\\-\lambda+\mu\end{pmatrix}} = 0$, so erhalten wir sofort $\lambda = 0$ und daher auch $\mu = 0$

- $\underbrace{\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}3\lambda+4\mu\\\lambda+2\mu\\\lambda+\mu\end{pmatrix}} = 0$, so erhalten wir $\lambda = -\mu$ und $\lambda = -2\mu$ und somit $\mu = 0$ und daher auch $\lambda = 0$.

Also sind C und C' linear unabhängig.

(b)

Wir berechnen Linksinverse zu B und C':

Da B eine invertierbare (siehe (a)) Diagonalmatrix ist, erhalten wir sofort die (beidseitige) Inverse:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Nun zu C':

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}3&4&1&0&0\\1&2&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&0&0&1\\1&2&0&1&0\\3&4&1&0&0\end{array}\right)\underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&1&1&0&-3\end{array}\right)\underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&-1&2\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-1&-2\end{array}\right)$$

Somit ist $\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ eine Linksinverse zu C'.

Wir erhalten

$${}_{C'}M_{B'}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&3&-1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&-1\\0&2&2\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
(Seite 9)

Aufgabe 3

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

(1) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B ist **surjektiv**, wenn

☒ jedes Element von B ein Urbild unter f besitzt.

☐ jedes Element von A auf mindestens ein Element in B abgebildet wird.

☐ der Kern von f trivial ist.

(2) Folgende Relationen auf der Menge $\mathbb{R}$ sind **reflexiv**:

☐ $x \sim y \Leftrightarrow x = y^2$

☒ $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot |y| = y \cdot |x|$

☐ $x \sim y \Leftrightarrow x + y \geq 0$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☒ $\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}^3 \\ (a,b) &\mapsto (a,b,0) \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ z &\mapsto \|z\| \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \frac{a^2}{b} &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B gilt:

☒ Ist A endlich und f surjektiv, so ist auch B endlich.

☐ Ist $|B| \geq |A|$, so ist f injektiv.

☒ Ist $|B| = |A|$ endlich und f injektiv, so ist f bereits bijektiv.

(5) Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B und seien M und N Teilmengen von A. Es gilt:

☐ $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.

☐ $f(M \setminus N) = f(M) \setminus f(N)$.

☒ $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.

(6) Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ bilden zusammen mit der Multiplikation von komplexen Zahlen eine Gruppe:

☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ ($\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet den Realteil der komplexen Zahl z)

☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\} \setminus \{0\}$

☒ $\{1, -1, i, -i\}$

(7) Bekanntlich ist ein Ring $(R, +, \cdot)$ **kommutativ**, wenn die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ ist. Die folgenden Ringe sind kommutativ:

☒ $\mathbb{Q}$

☒ $\mathbb{Z}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{Z}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)

☐ $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ (Ring der komplexen 2×2-Matrizen)

(8) Für jeden **Körper** K gilt:

☐ $1 + 1 \neq 0$ in K.

☐ Sind $a, b \in K$ mit $a^3 = b^3$, so folgt $a = b$.

☒ Sind $a, b \in K$ mit $(ab)^2 = 0$, so folgt bereits $a = 0 \vee b = 0$.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☒ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffassen.

☒ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen.

☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über den irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ auffassen.

(2) Zwei Vektoren v und w in einem Vektorraum V sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

☐ $v \notin \langle w \rangle$.

☐ $\langle v \rangle \cap \langle w \rangle = \{0\}$.

☒ $v \neq 0$ und $w \neq 0$ und $\langle v \rangle \cap \langle w \rangle = \{0\}$.

(3) Wie viele **1-dimensionale** Untervektorräume hat der $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^2$?

☒ 4

☐ 8

☐ ∞

(4) Die folgenden Abbildungen sind $\mathbb{C}$-**linear**:

☐ $\begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{array}$ ☒ $\begin{array}{c} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (z, z') \mapsto (z', z) \end{array}$ ☒ $\begin{array}{c} \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \\ A \mapsto A^T \end{array}$

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ haben vollen Rang:

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und einen Skalar $\lambda \in K$ gilt:

☐ $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \det(A)$.

☒ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, falls A invertierbar ist.

☒ $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(7) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und $\lambda \in K$ gilt:

☒ Die Matrix $A - \lambda I_n$ ist invertierbar, falls λ kein Eigenwert von A ist.

☐ Die Matrix $A - \lambda I_n$ ist die Nullmatrix, falls λ ein Eigenwert von A ist.

☐ Existiert ein Vektor $v \in K^n$ mit $Av = \lambda v$, so ist λ ein Eigenwert von A.

Aufgabe 5
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien A und B Teilmengen von V. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A\cup B\rangle$

(b) $\langle A\cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$

(c) Aus der Gleichheit $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle = \langle A\cup B\rangle$ folgt $\langle A\rangle \subset \langle B\rangle$ oder $\langle B\rangle \subset \langle A\rangle$.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Da $\langle A \rangle = \bigcap\limits_{\substack{U \subseteq V \text{ UVR} \\ A \subseteq U}} U$ der kleinste Untervektorraum ist, welcher A enthält und $\langle A \cup B \rangle$ ebenfalls A enthält, gilt $\langle A \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle$. Analog erhält man $\langle B \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle$ und somit $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle$.

(b)

Gilt nicht immer:
Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ und $A = \{e_1\}$ und $B = \{e_2\}$. Dann gelten
$\langle A \rangle = \{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{R} \}$ und $\langle B \rangle = \{ \binom{0}{y} \mid y \in \mathbb{R} \}$, sodass sich
$\langle A \rangle \cup \langle B \rangle = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0 \}$
ergibt. Allerdings ist
$\langle A \cup B \rangle = \mathbb{R}^2$,
da $A \cup B$ genau die Standardbasisvektoren enthält und somit ist $\langle A \cup B \rangle$ nicht in $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ enthalten.

(c)

Ist $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle = \langle A \cup B \rangle$, so ist $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ insbesondere ein Vektorraum. Angenommen, es gelten $\langle A \rangle \not\subseteq \langle B \rangle$ und $\langle B \rangle \not\subseteq \langle A \rangle$. Dann existieren Vektoren $v \in \langle A \rangle \setminus \langle B \rangle$ und $w \in \langle B \rangle \setminus \langle A \rangle$. Nun ist $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ ein Vektorraum, sodass die Summe $v+w$ auch in $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle$, also in $\langle A \rangle$ oder in

$\langle B \rangle$ liegen muss. In ersterem Fall erhalten wir dann

$$w = \underbrace{v+w}_{\in \langle A \rangle} - \underbrace{v}_{\in \langle A \rangle} \in \langle A \rangle \lightning$$

Im zweiten Fall

$$v = \underbrace{v+w}_{\in \langle B \rangle} - \underbrace{w}_{\in \langle B \rangle} \in \langle B \rangle \lightning$$

Somit war unsere Annahme falsch, d.h. es gilt $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ oder $\langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$.

Aufgabe 5
(Seite 14)

Aufgabe 5
(Seite 15)

Aufgabe 6
Sei K ein Körper und sei $f\colon \operatorname{Mat}_K(3\times 3)\to K$ eine **lineare Abbildung** mit $f(I_3)=3$. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Gleichung

$$f(A\cdot B)=f(B\cdot A)$$

für alle $A,B\in\operatorname{Mat}_K(3\times 3)$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass f die Spurabbildung sein muss.

Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix $A=(a_{ij})\in\operatorname{Mat}_K(n\times n)$ ist die Summe $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ ihrer Diagonalelemente.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Wir schreiben E_{ij}, $1\le i,j\le 3$, für den (i,j)-ten Standardbasisvektor von $\operatorname{Mat}_K(3\times 3)$ (die Matrix mit einer 1 an der (i,j)-ten Stelle und sonst nur Nullen). Dann gilt

$$E_{ij}\cdot E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, & j=k\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

per Definition der Matrixmultiplikation und wir erhalten

$$f(E_{ij})=f(E_{i1}\cdot E_{1j})\overset{\text{Vor.}}{=}f(E_{1j}E_{i1})=\begin{cases}f(E_{11}), & j=i\\ f(0)=0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Da $\mathbb{1}_3=E_{11}+E_{22}+E_{33}$, $f(E_{ii})=f(E_{11})$ für alle $1\le i\le 3$ und $f(\mathbb{1}_3)=3$, gilt

$f(E_{ii})=1$

für alle $1\le i\le 3$ vermöge der Linearität von f. Ist nun $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 3}\in\operatorname{Mat}_K(3\times 3)$, so erhalten wir

$$f(A)=f\Big(\sum_{1\le i,j\le 3}a_{ij}E_{ij}\Big)\overset{\text{Lin.}}{=}\sum_{1\le i,j\le 3}a_{ij}\,f(E_{ij})\underset{f(E_{ij})=0\text{ für }i\neq j}{=}\sum_{1\le i\le 3}a_{ii}\underbrace{f(E_{ii})}_{=1}=\sum_{1\le i\le 3}a_{ii}=\operatorname{tr}(A).$$